

## Список литературы

1. Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В. Остаточные напряжения: теория и приложения. М.: Наука, 1982.
2. Фридман Я. Б. Механические свойства металлов: в 2 ч. 3-е изд. М.: Машиностроение, 1974.
3. Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Швейкин А.И. Двухуровневая модель упругопластического деформирования поликристаллических материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. М.: ИПМ РАН, 2009. Т.15, №3. С. 327 – 344.
4. Трусов П.В., Волегов П.С., Нечаева Е.С. Многоуровневые физические теории пластичности: теория, алгоритмы, приложения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. №4, ч. 4. С. 1808 – 1810.
5. Трусов П.В., Волегов П.С. Физические теории пластичности: теория и приложения к описанию неупругого деформирования материалов. Ч. 1: Жесткопластические и упругопластические модели // Вестник ПНИПУ. Механика. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2011. №1. С. 5 – 45.
6. Трусов П.В., Волегов П.С. Физические теории пластичности: теория и приложения к описанию неупругого деформирования материалов. Ч. 2: Вязкопластические и упруговязкопластические модели // Вестник ПНИПУ. Механика. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2011. №2. С. 101 – 131.
7. Трусов П.В., Волегов П.С. Физические теории пластичности: теория и приложения к описанию неупругого деформирования материалов. Ч. 3: Теории упрочнения, градиентные теории // Вестник ПНИПУ. Механика. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2011. №3. С. 146 – 197.
8. Трусов П.В., Швейкин А.И., Нечаева Е.С., Волегов П.С. Многоуровневые модели неупругого деформирования материалов и их применение для описания эволюции внутренней структуры // Физическая мезомеханика. Томск: ИФПМ СО РАН, 2012. Т. 15, №1. С. 33 – 56.
9. Трусов П.В., Волегов П.С., Швейкин А.И. Конститутивная упруговязкопластическая модель ГЦК-поликристаллов: теория, алгоритмы, приложения. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. 147 с.
10. Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю. Описание внутризеренного и зернограничного упрочнения моно- и поликристаллов // Науч.-техн. ведомости С.-Петерб. гос. политехн. ун-та. Физико-математические науки. 2010. №2. С.110 – 119.

## Multi-level crystal plasticity theories of polycrystals: the residual mesostresses

P. S. Volegov, P. V. Trusov, A. Yu. Yanz

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Pr., 29, 614990 Perm

The problems related to the construction of multi-level mathematical models of inelastic deformation of crystalline materials based on physical theories plasticity are considered. The example of the two-level model for description the severe plastic deformation of fcc polycrystals, for example, in processes of metal forming is done. The issues relating to the description of hardening and rotations of crystal lattices of the grains. The focus is on the formation of residual meso-stresses in individual grains in the case of polycrystalline stress relief with a representative volume in general.

**Keywords:** crystal plasticity, polycrystal, hardening, rotation, residual mesostresses.

УДК 531.7, 53.082.2, 550.34.038.8

## Динамика тепловых плюмов в ячейке Хеле – Шоу

К. А. Гаврилов, В. А. Демин, Е. А. Попов

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Проведено численное моделирование свободной тепловой конвекции в ячейке Хеле – Шоу при центральном подогреве снизу. Расчеты выполнены в 3D-постановке с помощью открытого программного пакета OpenFOAM, представляющего собой интегрируемую платформу для численного моделирования задач механики сплошных сред. Для разных режимов всплытия получены анимационные изображения, иллюстрирующие поведение тепловых плюмов в зависимости от времени. Проанализировано влияние формы теплового фронта плюма на скорость всплытия.

**Ключевые слова:** тепловой плюм, численное моделирование, трехмерные течения, пакет OpenFOAM, ячейка Хеле – Шоу.

### 1. Введение

Долгое время проблемы вычислительного характера не позволяли проводить полноценные трехмерные расчеты в гидродинамике. На фоне большого числа экспериментов теоретические работы по моделированию трехмерных конвективных течений в широкой области надкритичностей стали появляться сравнительно недавно. С другой стороны, существуют гидродинамические системы, которые изначально позволяют облегчить расчеты путем сведения трехмерной задачи к двумерной в силу простоты геометрии. Одним из таких примеров специальной геометрии в области тепловой конвекции является ячейка Хеле – Шоу. Данная полость представляет собой прямоугольный параллелепипед, один из горизонтальных размеров которого много меньше двух других. Вследствие малой толщины полости конвективное движение в вертикальной ячейке Хеле – Шоу при подогреве снизу осуществляется преимущественно в плоскости широких граней. Однако даже в ячейке Хеле – Шоу при сравнительно небольших надкритичностях увеличение управляющего параметра может приводить к усложнению конвекции и появлению в течении третьей компонентой скорости. В частности, течение в форме конвективного факела, создаваемое точечным источником тепла, требует полного трехмерного численного моделирования. Температурные поля такого режима на этапе установления имеют характерную «грибообразную» форму, часто встречаются в природе и называются в литературе тепловыми плюмами [1].

В работе [2] численно методом конечных разностей изучено влияние коротких инерционных внешних сигналов сейсмического происхождения на конвективные течения в ячейке Хеле – Шоу при подогреве снизу пульсирующим точечным источником тепла. Расчет температурных полей и формы течений был проведен для коротких периодических сигналов, ориентированных вертикально и горизонтально в плоскости широких граней. Показано, что при наличии горизонтальных вибраций нарушается симметрия конвективного факела относительно вертикальной оси, а в случае вертикального сейсмического сигнала меняется скорость всплытия теплового пятна, при этом симметрия течения относительно вертикальной оси сохраняется. Влияние произвольно ориентированных в плоскости широких граней инерционных сигналов было рассмотрено в работе [3]. Внутри полости было выделено три узла, расположенных таким образом, чтобы однозначно определять смещение конвективного факела, вызванное инерционным сигналом. С них снимались температурные амплитудно-частотные характеристики в зависимости от направления и интенсивности сейсмического сигнала. Это позволило разработать методику определения частоты, амплитуды и направления инерционного сигнала с использованием минимального количества термодатчиков. Показано, что предложенная методика может быть использована при проектировании прибора, способного регистрировать инерционные воздействия в виде переменных по времени коротких сигналов.

В частности, расчеты [2,3] продемонстрировали необходимость более детального исследования

процесса формирования конвективного факела в ячейке Хеле – Шоу, который характеризуется возникновением и всплытием теплового плюма.

## 2. Основные характеристики платформы OpenFOAM

OpenFOAM (Field Operation and Manipulation) – перспективное, динамично развивающееся открытое программное обеспечение для моделирования задач механики сплошных сред (<http://www.openfoam.com>). Основным языком пакета является C++. Программное обеспечение устанавливается на Unix-подобные системы. В пакете имеются готовые решатели для различных гидродинамических систем. Дифференциальные уравнения в частных производных записываются в терминах математических операторов и решаются методом конечных объемов на произвольной расчетной сетке с многогранными ячейками. Работать в OpenFOAM можно как со структурированными, так и неструктурированными сетками. Значительное расширение возможностей пакета OpenFOAM обеспечивается за счет внесения изменений в стандартные решатели, например, добавления в уравнения дополнительных слагаемых (<http://openfoamwiki.net>). Для связывания скорости и давления в OpenFOAM реализованы неявные численные методы SIMPLE, PISO и PIMPLE [4]. Платформа работает с программным интерфейсом MPI, что позволяет разбивать расчетную область на части и проводить вычисления параллельно, используя одновременно до 2000 ядер.

Решение задачи состоит из трех этапов, включающих создание расчетной сетки, саму вычислительную процедуру и визуализацию полученных данных. В OpenFOAM входят утилиты для создания сетки, также кроме них можно использовать другие программы. Для визуализации результатов используется приложение ParaView (<http://www.paraview.org>), которое устанавливается вместе с платформой OpenFOAM. Процедуру визуализации можно выполнять с помощью других программ. Для этого необходимо конвертировать соответствующие файлы в нужный формат с помощью утилит OpenFOAM.

## 3. Постановка задачи Основные уравнения

Рассмотрим полость с твердыми гранями в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 1). Введем обозначения: высота ячейки –  $H$ , длина –  $L$ , толщина –  $d$ , размер нагревателя –  $l$ . Данную полость принято называть ячейкой Хеле – Шоу, если выполняется условие  $H, L \gg d$ . В ходе расчетов все вертикальные грани предполагаются идеально теплоизолированными. Полость неоднородно нагревается снизу и находится в

статическом поле тяжести. Течение жидкости в ячейке Хеле – Шоу описывается системой стандартных уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска [5]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + g \beta T \boldsymbol{\gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $p$  и  $T$  – размерные поля скорости, давления и температуры;  $\nu$ ,  $\beta$  и  $\chi$  – коэффициенты кинематической вязкости, теплового расширения и температуропроводности соответственно;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\boldsymbol{\gamma}$  – единичный вектор, направленный вертикально вверх;  $\rho$  – средняя плотность жидкости. Система (1) – (2) получается путем редукции заложенных в пакете OpenFOAM более общих уравнений, описывающих в том числе турбулентные течения.

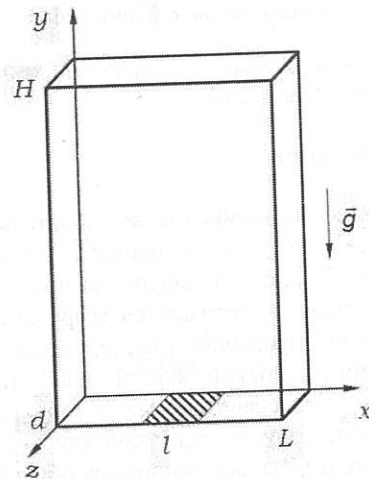


Рис. 1. Ячейка Хеле – Шоу

Неоднородность нагрева полости обеспечивается путем задания разности температур  $\theta$  между верхней охлаждающей стенкой и нижним центральным нагревателем. Для компонент вектора скорости на твердых гранях справедливо условие прилипания:  $\mathbf{v}|_{\Gamma} = 0$ .

## 4. Результаты расчетов

Система (1) – (2) решалась посредством прямого численного моделирования в размерном виде с использованием программного пакета OpenFOAM на суперкомпьютере “ПГУ–Тесла” Научно-образовательного центра Пермского государственного университета “Параллельные и распределенные вычисления” [7]. Расчеты проводились для полости с геометрическими размерами:  $L = 24$  мм,  $H = 32$  мм,  $d = 4$  мм, при этом размер нагревателя полагался равным  $l = 2$  мм. В расчетной сетке использовалось количество ячеек 89:110:25. Параметры жидкости формально соответствовали гептану:  $\nu = 0.6 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\chi = 0.88 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с;  $\beta = 1.24 \cdot 10^{-3}$  1/К [6]. Температура жидкости в началь-

ный момент времени была равна 20 °С. Горизонтальные границы поддерживались при постоянной температуре 20 °С. В ходе расчетов менялась только температура нагревателя.

Согласно общепринятой классификации все плюмы делятся на четыре типа [1]. Критерием служит соотношение температурного и гидродинамического пограничных слоев ножки плюма. При параметрах, соответствующих гептану, можно наблюдать три разных режима: вязкотеплопроводный, вязко-нетеплопроводный и невязко-нетеплопроводный.

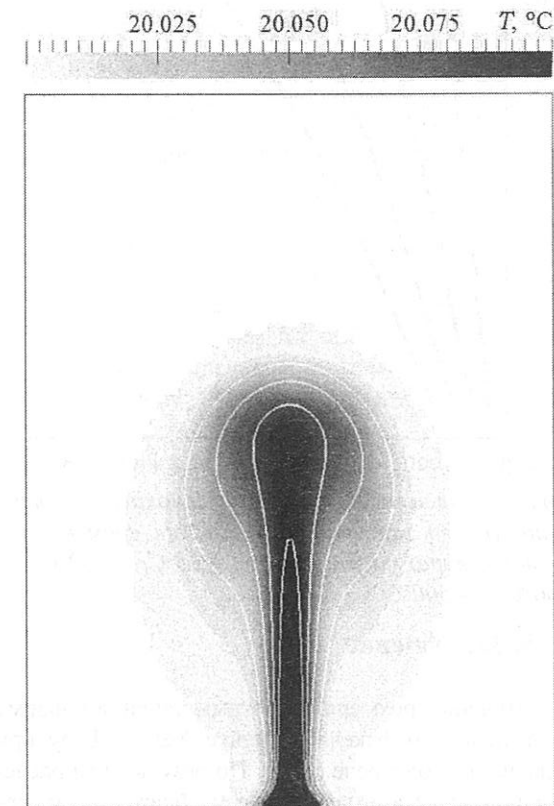


Рис. 2. Профиль температуры и изолинии плюма при  $\theta = 1$  °С

Вязкотеплопроводный режим определяется широкими пограничными слоями температуры и скорости. У конвективного факела в этом режиме наблюдается толстая ножка с округлой шляпкой, а температурный профиль больше напоминает лампочку (рис. 2). Подобные режимы всплытия плюма можно получить при небольшой разности температур нагревателя и холодильника.

При увеличении температуры нагревателя скорость всплытия плюма растет и тепло начинает преимущественно переноситься конвективной струей ножки, т.е. устанавливается вязко-нетеплопроводный режим. В этом случае у плюма имеется тонкий пограничный температурный слой и широкий пограничный вязкий скин-слой. Такой плюм имеет “грибообразную” форму с тонкой

ножкой и широкой, раскрывающейся в процессе движения шляпкой (рис. 3).

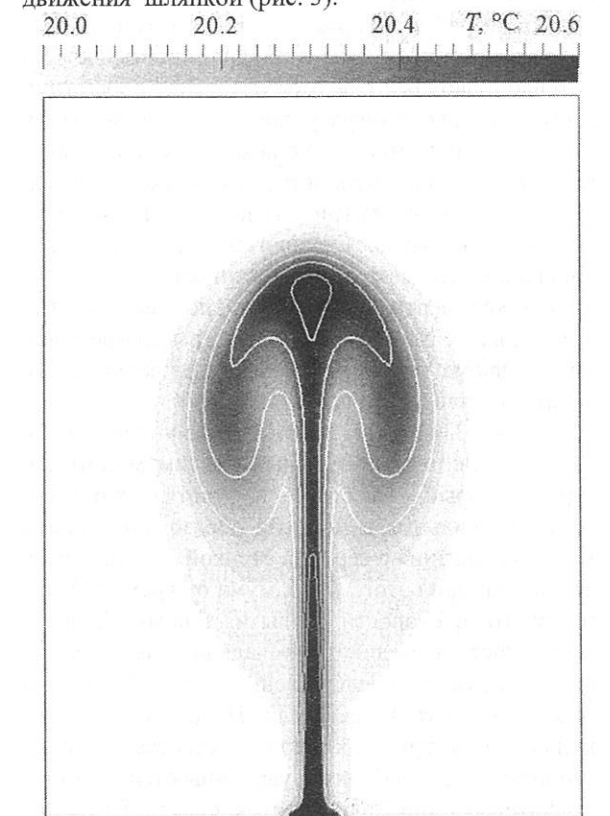


Рис. 3. Профиль температуры и изолинии плюма при  $\theta = 15$  °С

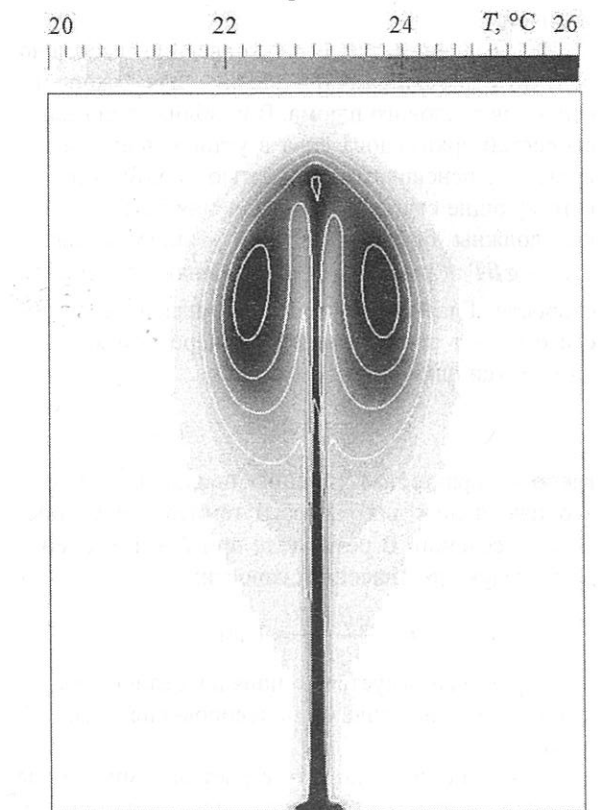


Рис. 4. Профиль температуры и изолинии плюма при  $\theta = 80$  °С

При еще больших температурах нагревателя возникает невязко-нетеплопроводный режим. Он характеризуется тонкими пограничными слоями скорости и температуры. Принадлежность к классу нетеплопроводных режимов отчетливо просматривается из вида температурного профиля ножки. У плюма наблюдается узкая ножка и слегка заостренная шляпка с двумя четко выраженными завихренностями на краях (рис. 4) за счет еще большей скорости всплытия. Становится также заметным нарушение симметрии конвективного факела относительно вертикали. Расчеты показывают, что при больших разностях температуры со временем ножка плюма теряет устойчивость и начинает изгибаться в плоскости широких граней.

На рис. 3, 4 можно заметить, что у плюма в области шляпки есть локальный максимум температуры, который существует на протяжении всего времени всплытия с момента образования плюма до его сближения с верхней стенкой. По зависимости координаты этого максимума от времени можно судить о скорости всплытия плюма. Графики зависимости координаты локального температурного максимума представлены на рис. 5 для разных температур нагревателя. На каждой из этих кривых есть три характерных участка. Сначала скорость всплытия плюма увеличивается, затем на графике есть линейный участок, соответствующий постоянной скорости всплытия, и, наконец, приближаясь к верхнему теплообменнику, плюм замедляется.

Из уравнений тепловой конвекции несложно получить независимую оценку для скорости всплытия теплового плюма. В приближении малых скоростей архимедова сила в установившемся режиме компенсируется вязкостью, поэтому соответствующие слагаемые в уравнении Навье – Стокса должны быть по порядку величины равны  $\nu \Delta v \sim g\beta T$ . Здесь  $\nu$  – вертикальная компонента скорости. Главное слагаемое в лапласиане скорости отвечает производной по поперечной координате ножки плюма, поэтому имеем

$$\nu \frac{v}{\delta^2} \sim g\beta \vartheta,$$

где  $\delta$  – характерная толщина ножки плюма,  $\vartheta$  – верхняя оценка для разности температур в поперечном сечении. В результате при  $\vartheta \sim 1$  К оценка дает следующее значение скорости:

$$v \sim \frac{g\beta\delta^2\vartheta}{\nu} \approx 1 \text{ см/с},$$

что хорошо согласуется по порядку величины с результатами численного моделирования (рис. 5, кривая 1).

Из рис. 5 видно, что с ростом температуры нагревателя плюм становится более динамичным. Различие в скорости движения на промежутках времени, соответствующих стадиям зарождения и

установившегося движения плюма, а также этапе его торможения при соударении с верхней гранью, стирается.

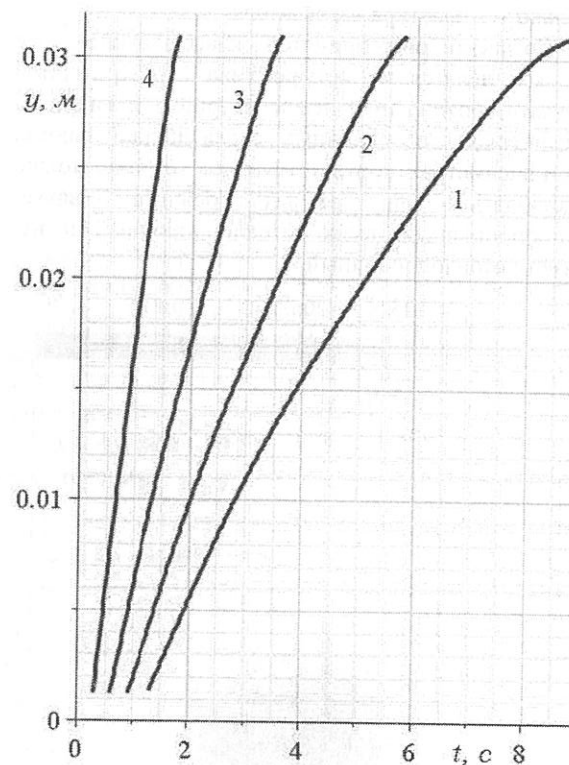


Рис. 5. Зависимость координаты локального температурного максимума плюма от времени при температурах нагревателя: 1 – 35°C, 2 – 50°C, 3 – 100°C, 4 – 500°C

### 5. Заключение

Изучены трехмерные режимы течения в форме конвективного факела в ячейке Хеле – Шоу при локальном подогреве снизу. По результатам расчетов получены анимационные изображения, иллюстрирующие развитие теплового плюма в процессе всплытия. Численно получены семейства кривых, характеризующие скорость движения плюма в разных режимах всплытия. Показано, что сначала на этапе формирования “грибообразной шляпки” скорость всплытия плюма нарастает. Затем установившаяся структура некоторое время перемещается с постоянной скоростью, пока верхняя граница не начинает оказывать влияние, замедляющее движение.

### Список литературы

1. Lappa M. Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability. Wiley. 2010. 670 p.
2. Бабушкин И.А., Глухов А.Ф., Демин В.А., Зильберман Е.А., Путин Г.Ф. Измерение инерционных микроускорений с помощью конвективных датчиков // Поверхность. 2009. №2. С. 72–77.

3. Бабушкин И.А., Демин В.А., Пепеляев Д.В. Принципы регистрации инерционных сигналов с помощью конвективных датчиков // Изв. ТПУ. Энергетика. 2010. Т. 317, №4. С. 38–43.
4. Ferziger J.H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. N.Y.: Springer, 2002. 423 p.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
6. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963. 708 с.
7. Гаврилов К.А., Демин В.А., Попов Е.А. Моделирование трехмерных конвективных течений с помощью пакета OpenFOAM // Вестник Пермского ун-та. Сер. Математика, Механика, Информатика. 2012. Вып. 3(11). С. 2328.

## Dynamics of thermal plums in Hele – Shaw cell

К. А. Гаврилов, В. А. Демин, Е. А. Попов

Perm State National Research University, 15, Bukirev St., 614990 Perm

Numerical modeling of free thermal plums in Hele – Shaw cell was fulfilled for the case of a cavity heated from below. Calculations have been carried out with the help of package OpenFOAM. This integrable platform is meant for numerical modeling in the area of continuous media mechanics. Animated images for different lifting regimes are received that illustrate behaviour of thermal plums in dependence on time. The stages of the plum’s formation, it’s steady lifting and the deceleration by the top boundary were analyzed for different profiles of the plum’s front.

**Keywords:** thermal plum, numerical modeling, 3D-calculations, package OpenFOAM, Hele – Shaw cell.